Yaoundé, le 15 mai 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES Série D

Durée : **3 h**

Exercice 1 : 5,5 points

I- 1. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin^3 x$. 1 pt

2. Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x \, dx$. 1 pt

3. En déduire la valeur moyenne de la fonction $g : x \mapsto x\sin^3 x$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. 0,5 pt

II- On considère dans C l'équation (E) : $z^3 - \lambda(1+i)z^2 + i\lambda^2 z = 0$, où λ est un paramètre complexe non nul.

1. Résoudre l'équation (E). 1,25 pt
2. Montrer que les images dans le plan complexe, des racines de (E) sont les sommets d'un triangle isocèle, dont on précisera le sommet. 0,75 pt
3. Déterminer λ pour que l'équation (E) admette $1+i$ comme racine. Résoudre (E) dans chacun des cas trouvés. 1 pt

Exercice 2 : 5,5 points

I- Un paquet de 9 cartes à jouer comprend 4 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame coûte 1 point. Du paquet, on extrait simultanément et au hasard 2 cartes et on désigne par X la variable aléatoire qui à tout tirage associe le total des points marqués.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. 1 pt
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il désavantageux ? Justifier la réponse. 0,75 pt
3. Calculer la variance de X. 0,5 pt

II- f est la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

1. Déterminer son ensemble de définition. 0,25 pt

2.a) Montrer que pour tout x de $[e; e^2]$, $\frac{1}{2\sqrt{2}e^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2e}$ 0,5 pt

b) En déduire que pour tout x de $[e; e^2]$, $\frac{x-e}{2\sqrt{2}e^2} + 1 \leq f(x) \leq \frac{x-e}{2e} + 1$ 0,5 pt

III- On considère l'équation différentielle : $(E_1) : y'' - 2y' + y = 4e^x$. On pose : $u(x) = 2x^2e^x$ pour tout réel x.

1. Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation (E_1). 0,5 pt
2. On pose z = y-u ; montrer que y est solution de (E_1) si et seulement si z est solution de l'équation : $(E_2) : z'' - 2z' + z = 0$ 0,5 pt

3.a) Résoudre l'équation (E_2) et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_1). 0,5 pt

3.b) Déterminer la solution particulière de (E_1) telle que sa courbe représentative passe par le point O(0 ;0) et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur -3 0,5 pt

<u>Problème</u> : 9 points

Soit f la fonction numérique définie par sur IR par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et (C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : 2cm.

1.a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5 pt

b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$; puis étudier la position relative de (D) et (C). 0,75 pt

2.a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. 0,5 pt

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f'. 0,5 pt

c. Vérifier que $f'(1) = 0$, puis en déduire le signe f' sur IR. 0,5 pt

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f. 0,25 pt

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $1{,}9 \le \alpha \le 2$. 0,5 pt

4. Construire (C) et la droite (D). 0,75 pt

5. Déterminer l'aire A en cm^2 de la portion du plan limitée par (C), l'asymptote (D) et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$. 0,75 pt

B - On considère la fonction g définie sur l'intervalle I=$[1{,}9;2]$ par : $g(x) = 1 + \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

1.a. Démontrer que pour tout x élément de I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$. 0,25 pt

b. Etudier le sens de variation de g puis démontrer que pour tout $x \in$ I, $g(x) \in$ I. 0,75

c. Démontrer que pour tout $x \in$ I, $|g'(x)| \le \frac{1}{9}$. 0,5pt

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Montrer que $\forall n \in IN$, $u_n \in$ I . 0,5 pt

b. Démontrer que $\forall n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$ et en déduire que $\forall n \in IN$, $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{9^n}$ 1 pt

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera. 0,25 p

3. Déterminer n tel que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. 0,75 pt