Yaoundé, le 13 juillet 2021

Concours d'admission

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES Série C durée 3h

Exercice 1 .... [4.5 points]

Soit n un entier naturel supérieure ou égal à 2. On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$, $B = n^2 + 2n + 2$ et $d = PGCD(A, B)$.

(1) Vérifier que $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2$ et en déduire que $n^4 + 4$ n'est pas premier. **[0,5 pt]**

(2) Montrer que tout diviseur de A qui divise n, divise 2. **[0,5 pt]**

(3) Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$. **[0,5 pt]**

(4) Dans cette question on suppose que n est impair.

- (a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair. **[0,5 pt]**
- (b) Montrer que d divise n. **[0,5 pt]**
- (c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premier entre eux. **[0,5 pt]**

(5) On suppose maintenant que n est pair.

- (a) Montrer que 4 ne divise pas A. **[0,5 pt]**
- (b) Montrer que $d = 2p$ où p est impair. **[0,5 pt]**
- (c) Montrer que p divise n et en déduire que $d = 2$. (*On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4*) **[0,5 pt]**

Exercice 2 .... [3.5 points]

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(1) On considère le plan (P) passant par le point $B(1; -2; 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-2; 1; 5)$ et le plan (R) d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

- (a) Démontrer que les plans (P) et (R) sont perpendiculaires. **[0,5 pt]**
- (b) Démontrer que l'intersection des plan (P) et (R) est la droite (Δ) passant par $C(-1; 4; -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2; -1; 1)$. **[0,5 pt]**
- (c) Soit le point $A(5; -1; 1)$. Calculer la distance de point A au plan (P) et la distance du point A au plan (R). **[0,5 pt]**
- (d) En déduire la distance du point A à la droite (Δ). **[0,25 pt]**

(2) Pour tout réel t, on considère le point $M_t(1 + 2t; 3 - t; t)$.

- (a) Déterminer en fonction de t la longueur $\varphi(t) = AM_t$. **[1 pt]**
- (b) Etudier le sens de varaition de φ. Préciser son minimum. **[0,5 pt]**
- (c) Interpréter géométriquement ce minimum. **[0,25 pt]**

Exercice 3 .... [4 points]

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

(1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_n > 0$. **[0,5 pt]**

(2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, **[0,5 pt]**

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

(3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \quad \text{and} \quad T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}.$$

(a) Calculer S_n et T_n en fonction de n. **[0,5 pt]**

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$. **[0,5 pt]**

(4) On admet que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, **[1 pt]**

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

(5) (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante. **[0,5 pt]**

(b) On admet que la suite (u_n) est convergente et on désigne par l sa limite. Déduire des questions précédentes que $e^{\frac{5}{6}} \leq l \leq e$. **[0,5 pt]**

Exercice 4 .... [8 points]

Pour construire la courbe (Ψ) de la décoration, le technicien auteur du plan affirme qu'il a tracé dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, la courbe représentative (C) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x + 4\sqrt{4-x^2}}{5}$, et celle de son symétrique par rapport au point O. (***Unité graphique : 2cm***).

(1) Soit D l'ensemble de definition de f.

(a) Justifier que $D = [-2, 2]$. **[0,25 pt]**

(b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2 et à gauche en 2. Donner une interprétation graphique de chaque résultat. **[1 pt]**

(c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de varaitions. **[1,25 pt]**

(d) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1. **[0,5 pt]**

(e) Tracer (T) et (C). **[1 pt]**

(2) On désigne par s la symétrie de centre O et par (C') l'image de (C) par s.

(a) Démontrer que (C') a pour équation : $y = \dfrac{3x - 4\sqrt{4-x^2}}{5}$. **[0,5 pt]**

(b) En déduire que la courbe (Ψ) a pour équation : $25(x^2+y^2) - 30xy - 64 = 0$. **[0,5 pt]**

(c) Tracer la courbe (Ψ). **[0,5 pt]**

(3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. On considère les points M et M' d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' des nombres réels tels que M'=r(M).

(a) Déterminer l'écriture complexe de r. **[0,25 pt]**

(b) En déduire x et y en fonction de x' et y' **[0,5 pt]**

(c) Déterminer une équation cartésiennne de l'image (Ψ') de (Ψ) par r. **[0,5 pt]**

(d) En déduire que (Ψ') est une ellipse dont on précisera l'excentricité ; les foyers et les sommets. **[1 pt]**

(e) Quelle est la nuture exacte de (Ψ) ? Justifier votre réponse. **[0,25 pt]**