Yaoundé, le 13 juillet 2021

Concours d'admission
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES Série D durée 3h

Exercice 1 .... [3,75 points]

I– On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$.

(1) Montrer que P admet une racine complexe imaginaire pure z_0. **[0,75 pt]**

(2) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$. **[0,5 pt]**

(3) En déduire les racines du polynôme P. **[0,75 pt]**

II– Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3i$ et $2-3i$.

(1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

(a) Déterminer l'écriture complexe de r. **[0,5 pt]**

(b) Déterminer l'affixe du point A', image du A par r. **[0,5 pt]**

(c) Démonter que les points A', B et C sont alignés. **[0,75 pt]**

Exercice 2 .... [4,75 points]

I– Le tableau suivant donne le PNB x (en euro) par habitant ainsi que le nombre y d'hôpitaux pour 1 million d'habitants dans quelques pays européens.

Pays	A	B	C	D	E	F	G	H
PNB (x)	5100	7800	11200	15800	20100	26230	28910	31910
Nombre (y)	620	1080	1550	2100	3000	3800	4200	4400

(1) Représenter le nuage de points associé à la série (x, y). (*Unités : en abscisse : 1 cm pour 1000 euros, en ordonnée : 1 cm pour 400 hôpitaux. Origine :* $M_0(5000; 600)$) **[1 pt]**

(2) Déterminer les coordonnées du point moyen G. **[0,5 pt]**

(3) Donner une équation cartésienne de la droite de régression de y en x. **[1 pt]**

(4) Un pays a un PNB de 23400 euros. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux dans ce pays ? **[0,5 pt]**

II– En 2005, Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. Ce laboratoire met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans $0,1\%$ des cas ». On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

(1) Déterminer $P(M)$, $P(T/M)$ et $P(T/\overline{M})$. **[0,75 pt]**

(2) En déduire $P(T)$. **[0,5 pt]**

(3) Calculer la probabilité que l'animale soit malade sachant que le test est positif. **[0,5 pt]**

Exercice 3 .... [8,5 points]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère othonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *(Unité graphique $2cm$.)*

(1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$. **[1 pt]**

(2) Montrer que le point A de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 0 est un centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$. **[0,5 pt]**

(3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **[0,75 pt]**

(4) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point A. **[0,5 pt]**

(5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (T). **[1,25 pt]**

(6) (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser. **[0,5 pt]**

(b) Dresser le tableau de variation de la bijection recprique f^{-1} de f. **[0,5 pt]**

(c) Tracer la courbe représentative (C') de f^{-1} sur le même graphique que $(\mathcal{C}_f)$. **[0,75 pt]**

(d) Expliciter $f^{-1}(x)$. **[0,5 pt]**

(7) (a) Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = \dfrac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}$. **[0,25 pt]**

(b) En déduire la primitive F de f qui s'annule en 0. **[0,25 pt]**

(8) Soit α un réel, $\alpha < 0$. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la portion du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

(a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2. **[0,5 pt]**

(b) Déterminer la limite quand α tend vers $-\infty$ de $\mathcal{A}(\alpha)$. **[0,25 pt]**

Exercice 4 .... [3 points]

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n$.

(1) (a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$. **[0,75 pt]**

(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. **[0,5 pt]**

(c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? **[0,25 pt]**

(2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1. **[0,75 pt]**

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. **[0,25 pt]**

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. *(On pourra d'abord calculer la limite de $w_n = \ln u_n$.)* **[0,5 pt]**